Lycée Carnot Gambetta	ECG1
Mr SAUVAGE	Travail de vacances

MATHEMATIQUES

Travail de vacances

&

STAGE DE PRE-RENTREE

Le document qui suit est construit de la manière suivante :

- ✓ La fiche d'inscription : « STAGE DE PRE-RENTREE MATHEMATIQUES – PREPA ECG »
- ✓ Rappels de cours illustrés par de nombreux exemples et quelques exercices corrigés
- ✓ Enoncé du stage de pré-rentrée

Un stage de remise à niveau en mathématiques

Volume : 16 heures réparties comme suit : du lundi 25 août 2025 au jeudi 28 août 2025

HORAIRES : 10h – 12h et 13h30 – 15h30.

Le lundi 25 août, je ferai l'accueil vers 9h45 dans le hall d'entrée du site Carnot

Les deux premières séances seront assurées par moi-même.

Le deux séances suivantes seront assurées par Mr ANAKKAR : le professeur de maths en ECG2

PRESENTATION

Chers futurs élèves,

Je vous souhaite la bienvenue en CPGE et dans ma classe tout particulièrement. Nous travaillerons ensemble pour que vous puissiez donner le meilleur de vous-même, sans jamais oublier l'optique des concours qui représentent la finalité des deux années de prépa. Cette formation vous demandera beaucoup de votre temps et de votre énergie, mais elle vous apportera aussi une expérience extrêmement enrichissante. J'attends de vous du sérieux, du travail, de l'écoute et de l'investissement. Mais je ne doute pas que vous saurez faire preuve de tout cela.

SAUVAGE JEROME

ORGANISATION DE LA MATIERE

Les mathématiques représentent une part importante du programme en ECG1 et se répartissent comme suit :

- ✓ 8h de mathématiques (6h de cours et 2h de TD)
- ✓ 1h de TP d'informatique en Python,
- ✓ 1h de colle toutes les deux semaines.

Le programme de mathématiques en ECG1 fait intervenir à la fois de l'algèbre (logique et raisonnement, calcul matriciel, systèmes linéaires, espaces vectoriels et applications linéaires), de l'analyse (suites, fonctions numériques, calcul intégral et équations différentielles, séries numériques) ainsi que des probabilités (probabilités sur un univers fini et infini, variables aléatoires discrètes) qui représentent une partie importante du programme.

PRE-REQUIS

Ce document vous fera réviser les notions importantes de calculs (opérations sur les fractions, identités remarquables, dérivation…). Et ce afin que vous vous assuriez que ces points ne vous posent pas de problèmes (dans le cas contraire il vous faudra les travailler pendant l'été) et que vous puissiez partir sur de bonnes bases dès la rentrée de septembre.

DES REFERENCES

Il n'y a pas de livres spécifiques à acheter en maths, car le cours polycopié, les feuilles de TD, les devoirs se suffisent à eux-mêmes. Si vous désirez acheter un ouvrage pour préparer efficacement votre rentrée, je vous conseille le livre suivant :

Mathématiques-Réviser et consolider les bases de Terminale

pour réussir la 1ère année d'ECG-Complément Python-2e édition

Editeur : Ellipse (prix d'environ 19 €)

1. Les ensembles de nombres

Lorsqu'on manipule des nombres, il est important d'en reconnaître la nature. Ci-dessous, vous pouvez observer un panorama des différents ensembles de nombres.

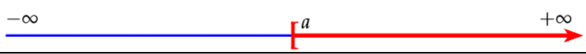
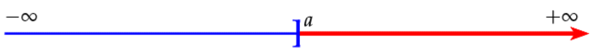
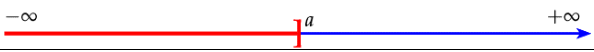
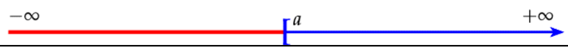
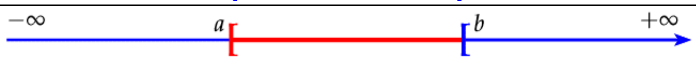
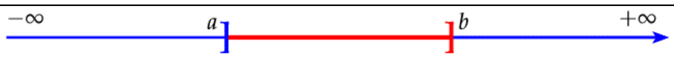
- ✓ $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- ✓ $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- ✓ $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- ✓ Les ensembles $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{R}^*$ désignent les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ « **privés** » de zéro.
- ✓ $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls.
- ✓ $\mathbb{R}_-$ désigne l'ensemble des réels négatifs ou nuls.
- ✓ $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.
- ✓ $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement négatifs.

Exemples

- ✓ On écrit $n \in \mathbb{N}$ pour signifier que n est un entier naturel et $n \notin \mathbb{N}$ sinon.
- ✓ On écrit $x \in \mathbb{R}_+$ ou encore $x \geq 0$ pour signifier que x est un réel positif ou nul.

> ✍ **Définition n°1 : intervalles**
>
> Naïvement, un « ***intervalle I de $\mathbb{R}$*** » désigne l'ensemble des réels compris entre deux **bornes**.
>
> En particulier, $\mathbb{R} =]-\infty\,; +\infty[$ est un intervalle.
>
> Les intervalles autres que $\mathbb{R}$ sont des ensembles de nombres réels vérifiant une inégalité ou une double inégalité.

Voici les intervalles de $\mathbb{R}$:

L'intervalle	« est l'ensemble des réels x vérifiant … »	Représentation graphique
$[a\,; +\infty[$	$x \geq a$	
$]a\,; +\infty[$	$x > a$	
$]-\infty\,; a]$	$x \leq a$	
$]-\infty\,; a[$	$x < a$	
$[a\,; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a\,; b[$	$a < x < b$	
$[a\,; b[$	$a \leq x < b$	
$]a\,; b]$	$a < x \leq b$	

Exemples

- ✓ On peut écrire : $x \geq 0$ lorsque $x \in [0\,;\,+\infty[\; = \mathbb{R}_+$ et $x > 0$ lorsque $x \in]0\,;\,+\infty[\; = \mathbb{R}_+^*$.
- ✓ On peut écrire : $x \leq 0$ lorsque $x \in]-\infty\,;0[= \mathbb{R}_-$ et $x < 0$ lorsque $x \in]-\infty\,;0[= \mathbb{R}_-^*$.

✍ **Définition n°2** : on appelle « **segment** » tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type : $[a\,;b]$ avec $a \leq b$.

Exemple : $[-1\,;3] = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 3\}$ est un segment.

Ainsi, on peut écrire par exemple : $1 \in [-1\,;3]$ car $-1 \leq 1 \leq 3$ mais aussi $5 \notin [-1\,;3]$.

Réunion d'intervalles : considérons l'ensemble des réels x vérifiant : $x < 2$ **ou** $x \geq 5$.

L'ensemble visualisé s'écrit : $]-\infty\,;2[\,\cup\,[5\,;\,+\infty[$.

Exemple : $\mathbb{R}^*$ peut s'écrire : $]-\infty\,;0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

2. Bien s'exprimer en maths

La bonne maîtrise des calculs est un objectif primordial cette année. Pour cela, il est important de bien s'exprimer quand il s'agit de donner une description d'une expression algébrique.

Soient A et B nombre réel.

- ✓ " $A + B$ " est la **somme** des termes A et B
- ✓ "A $- B$ " est la **différence** des termes A et B.
- ✓ " $-A$ " est l'**opposé** de A.
- ✓ " $A \times B$ " est le **produit** des facteurs A et B.
- ✓ " $\frac{A}{B}$ " est le **quotient** du numérateur A et du dénominateur B.
- ✓ " $\frac{1}{B}$ " est **l'inverse** de B.
- ✓ " A^2 " est le **carré** de A et " A^3 " est le **cube** de A.
- ✓ " $\sqrt{A}$ " est la **racine carrée** de A (radicande)
- ✓ e^A est **l'exponentielle** de A tandis que " $\ln(A)$ " est le **logarithme** de A.

3. Calculs dans les réels

3.1 Fraction de deux nombres réels

- Si a et b sont deux réels alors la fraction $\frac{a}{b}$ n'a de sens que si $b \neq 0$.
- Si $b \neq 0$ alors : $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Proposition n°1 : règles de calcul sur les fractions

Soient a, b, c, d des entiers tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

$$\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a+d}{b} = \frac{a}{b} + \frac{d}{b} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Remarque n°1

$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$	$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ tandis que $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$
$\frac{c+a}{c+b} \neq \frac{a}{b}$	$\frac{2+7}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$ tandis que $\frac{7}{1} = 7$
$\frac{a+d}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{d}{c}$	$\frac{3+4}{1+2} = \frac{7}{3}$ tandis que $\frac{3}{1} + \frac{4}{2} = 3 + 2 = 5$

METHODE n°1 : simplifier une fraction

Pensez à décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de nombres premiers (entiers naturels qui admettent exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs, tels que 2, 3, 5, 7, . . .). Il est important pour cela de bien connaître ses tables de multiplication. On en profitera donc pour les réviser. On peut alors ensuite simplifier les termes communs qui sont en facteur à la fois au numérateur et au dénominateur, en utilisant la formule : $\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}$.

On appelle fraction « **irréductible** » une fraction qui ne peut plus être simplifiée.

Exemple : $\frac{42}{30} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5} = \frac{7}{5}$

Exercice n°1 : simplifier

- ✓ $\frac{21}{15}$
- ✓ $\frac{42}{14}$
- ✓ $\frac{24}{144}$
- ✓ $\frac{105}{49}$

METHODE n°2 : mettre au même dénominateur

Pour écrire sous forme d'une fraction irréductible une somme de fractions, on procède comme suit :

1. Ecrire que : $\frac{a}{b} + \frac{d}{c} = \frac{a \times c}{b \times c} + \frac{d \times b}{b \times c} = \frac{ac+db}{ac}$.
2. Simplifier sous forme irréductible.

Exemple : $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}=\frac{1\times12}{9\times12}-\frac{1\times9}{9\times12}=\frac{12-9}{9\times12}=\frac{3}{9\times12}=\frac{1}{3\times12}=\frac{1}{36}$

Exercice n°2 : simplifier

✓ $\frac{7}{6}-\frac{1}{15}$ ✓ $\frac{5}{6}+\frac{1}{15}$ ✓ $\frac{3}{14}-\frac{1}{28}$ ✓ $\frac{5}{18}+\frac{1}{24}$

METHODE n°3 : quotient de fractions

$$\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b} \qquad \frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{c}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{d}{c}}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Exemple : $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{3}}=\frac{2\times3}{9\times7}-\frac{2}{3\times7}=\frac{2}{21}$

Exercice n°3 : simplifier

✓ $\frac{\frac{8}{21}}{4}$ ✓ $\frac{8}{\frac{21}{4}}$ ✓ $\frac{\frac{8}{21}}{\frac{4}{7}}$ ✓ $\frac{2\times\frac{5}{3}-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}-3\right)^2}$

3.2 Puissances entières d'un nombre réel

On rappelle que si x est un réel et n un entier naturel non nul alors : $x^n=x\times x\times\ldots\times x$ (n facteurs) et par convention : $x^0=1$. Si x est **non nul** alors : $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ désigne l'inverse de x^n.

Proposition n°2 : pour tous réels a,b et tous entiers relatifs m,n on a :

$$a^n\times a^m=a^{n+m},\ \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m},\ (a^m)^n=a^{m\times n},\ (ab)^n=a^n\times b^n,\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \text{ si } b\neq0$$

Exemples :

- Le carré de x n'est autre que $x^2=x\times x$
- Le cube de x n'est autre que : $x^3=x\times x\times x$
- Pour $x\neq0$, l'inverse de x n'est autre que : $x^{-1}=\frac{1}{x}$

3.3 Racine carrée d'un nombre réel positif

Définition n°3 : si x est **un réel positif** alors la racine carrée de x est le nombre réel positif noté $\sqrt{x}$ dont le carré est égal à x. Autrement dit : $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$.

Exemples : $\sqrt{0}=0, \sqrt{9}=3,\ \left(\sqrt{5}\right)^2=5$.

Proposition n°3 : pour tous réels a,b positifs : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ et si $b\neq0$ on a : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

Exercice n°4 : simplifier

$A = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$ $\qquad B = \sqrt{\dfrac{16}{25}}$ $\qquad C = \sqrt{6} \times \sqrt{5} \times \sqrt{18} \times \sqrt{15}$

4. Développer et factoriser

✍ **Définition n°4** : **développer**, c'est transformer un produit en une somme ou une différence.

Exemples : rappellons les bonnes vieilles **égalités remarquables** : si a et b sont deux réels alors :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exercice n°5 : développer les expressions suivantes : $A = (2x^2 + 3x + 3)(x + 1), B = (-2 + x)^2$

$C = (3x + 1)^2 - (x + 2)^2, D = (x + 3)^3, E = (1 + x)^2 + (1 - x)(1 + x)$.

✍ **Définition n°5** : **factoriser**, c'est transformer une somme ou une différence en produit.

Exemple : on factorise $(2x - 1)^2 - 9$ en écrivant :

$(2x - 1)^2 - 9 = (2x - 1 - 3)(2x - 1 + 3) = (2x - 4)(2x + 2)$.

METHODE n°4 : **pour factoriser,**

- ✓ On repère dans l'expression le ou les facteurs communs à tous les termes intervenant dans la somme.
- ✓ On écrit ce terme ou ces termes multiplié par les autres termes en facteur mis entre crochet, en respectant les signes + et − intervenant dans l'expression.
- ✓ On simplifie ensuite ce qu'il y a à l'intérieur du crochet.

Exemple : factoriser $A = (x - 5)(x + 2) - (2x + 3)(x + 2)$.

$A = (x + 2)[(x - 5) - (2x + 3)]$

$A = (x - 5)(x - 5 - 2x - 3)$

$A = (x - 5)(-x - 8)$

Exercice n°6 : factoriser les expressions suivantes : $A = (x + 2)(3x^2 + 1) - (x + 1)(x + 2)$

$B = x^2 - 16 + 3(x - 4), C = (x - 1)^2 - (x - 1)(x + 3)$

5. Equations

- ✓ Lorsqu'on résout une équation, on commence toujours par réfléchir au « **domaine de définition** » de cette équation, c'est à dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'équation est bien définie.
- ✓ Lorsqu'on souhaite résoudre une équation du type $f(x)=g(x)$, on se ramène généralement à une équation

de la forme $f(x)-g(x)=0$ puis on cherche à factoriser cette différence en vue d'appliquer la propriété du produit nul.

5.1 Equation polynômiale de degré 1

Proposition n°4 : si $a\neq 0$, l'équation $ax+b=0$ admet pour seule solution le réel $-\frac{b}{a}$.

Exemple : $3x+6=0 \Leftrightarrow 3x=-6 \Leftrightarrow x=-2$ e finalement, $S=\{-2\}$.

5.2 Equation polynômiale de degré 2

Proposition n°5 : soient a,b,c des réels avec $a\neq 0$ alors le réel $\Delta=b^2-4ac$ s'appelle le « **discriminant** » du trinôme ax^2+bx+c.

- ✓ Si $\Delta<0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ ne possède pas de solution réelle.
- ✓ Si $\Delta=0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ possède pour unique solution le réel $x_0=-\frac{b}{2a}$.
- ✓ Si $\Delta>0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ possède deux solutions réelles : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple : résoudre l'équation $2x^2+x-6=0$.

Le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

Le discriminant vaut : $\Delta=1^2-4\times 2\times(-6)=49>0$ donc l'équation possède deux solutions réelles :

$x_1=\frac{-1-\sqrt{49}}{4}=\frac{-8}{4}=-2$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{49}}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. Finalement, $S=\{\frac{3}{2},-2\}$.

Exercice n°7 : résoudre les équations suivantes : $x^2+5x+6=0$ et $x^2+x+1=0$.

Proposition n°6 : **cas particulier**

Soient a,x des réels.

1) Si $a<0$ alors l'équation : $x^2=a$ n'a pas de solution réelle.
   Si $a=0$ alors l'équation : $x^2=0$ admet 0 pour unique solution.
   Si $a>0$ alors l'équation : $x^2=a$ admet deux solutions à savoir : $x=\pm\sqrt{a}$.
2) L'équation : $\sqrt{x}=a$ n'a de sens que si $x\geq 0$.
   Dans ce cas et si $x\geq 0$, elle possède pour seule solution $x=a^2$.

Exemple : si on tombe sur l'équation $x^2 - 4 = 0$, il peut pertinent de calculer son discriminant !

- ✓ On peut par exemple écrire : $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \Leftrightarrow x - 2 = 0 \; ou \; x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.
- ✓ On peut aussi écrire : $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Exercice n°8 : résoudre les équations suivantes : $x^2 + 6 = 0$ et $x^2 - 3 = 0$.

Exemple : résoudre l'équation $(E) : 3(x+1)(x+3) = (x+3)^2$. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}, (E) \Leftrightarrow 3(x+1)(x+3) - (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)[3(x+1) - (x+3)] = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(3x+3-x-3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(2x) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \; ou \; 2x = 0 \Leftrightarrow x = -3 \; ou \; x = 0$.

Finalement, $S = \{-3{,}0\}$.

☠ Quand j'écris qu'une équation est « **équivalente** » à une autre, je veux signifier qu'elles possèdent toutes les deux le même ensemble de solutions.

Dans l'équation précédente, certains seraient tenter simplifier chaque membre par $(x+3)$ et écrire alors :

$(E) \Leftrightarrow 3(x+1) = (x+3) \Leftrightarrow 3x + 3 = x + 3 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Mais bien-sûr tout ceci est **FAUX** car l'ensemble solution que vous trouvez alors ne contient plus la solution -3.

Exercice n°9 : résoudre les équations suivantes :

1) $2x + 5 = 0$
2) $3x - 7 = 5(x+2) + 8$
3) $x^2 + 2x - 3 = 0$
4) $x(x-1) + (x+4)(x-1)^2 = 0$

5.3 Equation quotient

Exemple : résoudre l'équation $(E): \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} = -3$.

Ici, il est très important de débuter par la recherche de l'ensemble de définition.

(E) est bien définie pour $x + 2 \neq 0$ et $x \neq 0$ et donc le domaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{-2{,}0\}$.

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2{,}0\}, (E) \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} + 3 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{mise\ au\ même\ dénominateur} \frac{x^2+2(x+2)+3x(x+2)}{x(x+2)} = 0$

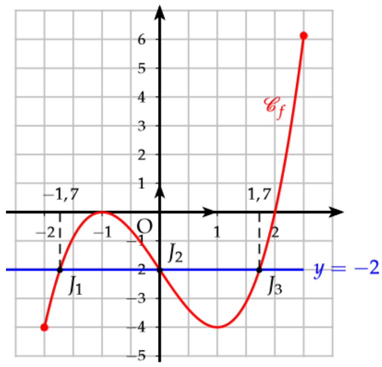
$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{une\ fraction\ est\ nulle \\ quand\ son\ numérateur \\ est\ nul}} x^2 + 2(x+2) + 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 + 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Finalement, $S = \{-1\}$.

Exercice n°10 : résoudre les équations suivantes : 1) $\frac{x-4}{x+4} = 0$ 2) $\frac{x+2}{x+1} + 4 = \frac{5x}{x+2}$

Résolution graphique d'équations

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$ une fonction et soit C_f son graphe dans un repère du plan.

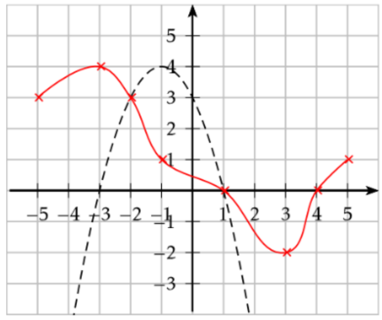


L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$ est formé des abscisses des points d'intersection du graphe de f avec la droite horizontale d'équation $y = a$.

Exemple

- ✓ L'ensemble solution de l'équation $f(x) = 0$ est $S = \{-1\,;2\}$.
- ✓ L'ensemble solution de l'équation $f(x) = -2$ est $S = \{-1{,}7\,;0\,;1{,}7\}$.

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x)$ deux fonctions et soient C_f et C_g leurs graphes dans un repère du plan.



L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est formé des abscisses des points d'intersection de C_f et C_g.

Exemple : l'équation $f(x) = g(x)$ donne pour ensemble solution : $S = \{-2\,;1\}$.

6. Inéquations

Définition n°6 : une « **inégalité** » est un énoncé permettant de comparer l'ordre de deux quantités.

- ✓ $a < b$ signifie que a est strictement inférieur à b ou encore que b est strictement supérieur à a.
  L'écriture $a < b$ est une **inégalité stricte.**
- ✓ $a \leq b$ signifie que a est inférieur ou égal à b ou encore que b est supérieur ou égal à a.
  L'écriture $a \leq b$ est une **inégalité large**.

☠ Quand on fait joujou avec des inégalités

Si $a < b$ et $b < c$ alors : $a < c$	On parle de « transitivité »
Si $a < b$ alors : pour tout réel c on a : $a + c < b + c$	En ajoutant c aux deux membres
Si $a < b$ alors : $-a > -b$	En multipliant chaque membre par -1
Si $a < b$ alors pour tout réel c strictement positif on a : $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	En multipliant ou divisant chaque membre par un réel strictement positif.
Si $a < b$ alors pour tout réel c strictement négatif on a : $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	En multipliant ou divisant chaque membre par un réel strictement négatif.

Remarque

- Démontrer que $a < b$ revient à montrer que : $a - b < 0$.
- Démontrer que $a > b$ revient à montrer que : $a - b > 0$.

« Pour comparer deux quantités, on peut étudier le signe de leurs différence ».

Exercice n°11 : démontrer que pour tout réel x positif on a : $x + 1 \geq 2\sqrt{x}$.

6.1 Inéquation polynômiale de degré 1

Exemple : $(E) : x \in \mathbb{R}\, et\ 3x - 7 \geq 0$ est une inéquation polynômiale de degré 1 dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

$3x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 7 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3}$. Finalement, l'ensemble solution est l'intervalle : $S = [\frac{7}{3}\ ;\ +\infty[$.

Exercice n°12 : résoudre les inéquations : $2x + 1 < 0$ et $-6x + 3 \leq 0$.

6.2 Inéquation polynômiale de degré 2

Proposition n°7 : soient a, b, c des réels avec $a \neq 0$ alors le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle toujours le « **discriminant** » du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- ✓ Si $\Delta \leq 0$ alors le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ est toujours du signe de a.
- ✓ Si $\Delta > 0$ alors le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ est du signe de a lorsque x est à l'extérieur des racines et il est du signe de $-a$ lorsque x est situé à l'intérieur des racines.

Cas $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

Cas $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

Cas $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	

- **Exemple** : (E_4) : $-3x^2 + 7x + 6 \leq 0$ est une inéquation polynômiale du second degré dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x - 3$ est $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 49 + 72 = 121$.

Puisque $\Delta > 0$ alors l'équation possède deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-11}{-6} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+11}{-6} = -\frac{2}{3}.$$

On dresse alors le tableau de signe du trinôme :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$-3x^2+7x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement, l'ensemble solution est : $S =]-\infty\,;\,-\frac{2}{3}] \cup [3\,;\,+\infty[$.

Exercice n°13 : résoudre les inéquations : $x^2 + x + 1 < 0$ et $x^2 + 3x - 4 \leq 0$.

Proposition n°8 : cas particulier

Soient a, x des réels avec $a > 0$ alors :

1) L'inéquation : $x^2 < a$ a pour solution $S =]-\sqrt{a}\,;\,\sqrt{a}[$.
2) L'inéquation : $x^2 \leq a$ a pour solution $S = [-\sqrt{a}\,;\,\sqrt{a}]$.
3) L'inéquation : $x^2 > a$ a pour solution $S =]-\infty; -\sqrt{a}\,[\cup]\sqrt{a};\,+\infty[$.
4) L'inéquation : $x^2 \geq a$ a pour solution $S =]-\infty; -\sqrt{a}\,] \cup [\sqrt{a};\,+\infty[$.

Exercice n°14 : résoudre les inéquations : $x^2 < 25$ et $x^2 \geq 3$.

6.3 Méthode générale

METHODE : lorsqu'une inéquation ne peut se ramener à une inéquation de degré un ou deux, on cherchera à la mettre sous la forme : $A(x) > 0, A(x) < 0, A(x) \leq 0, A(x) \geq 0$.

Exemple : résoudre l'inéquation $(E) : (2x-1)(x^2+5) \geq 3(2x-1)^2$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}, (E) \Leftrightarrow (2x-1)(x^2+5) - 3(2x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)[(x^2+5) - 3(2x-1)] \geq 0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x^2+5-6x+3) \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2-6x+8) \geq 0.$$

- $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$
- Le discriminant du trinôme $x^2 - 6x + 8$ est $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 8 = 36 - 32 = 4$.
- Puisque $\Delta > 0$ alors le trinôme possède deux racines réelles distinctes :
  - $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-2}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+2}{2} = 4.$

- On dresse un tableau de signes du dernier quotient :

x	$-\infty$		$1/2$		2		4		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
x^2-6x+8		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$(2x-1)(x^2-6x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble solution n'est autre que : $S=[\frac{1}{2};2]\cup[4;+\infty[$.

☠ Ne surtout pas écrire : $(2x-1)(x^2-6x+8)\geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)\geq 0\ et\ (x^2-6x+8)\geq 0$ ce qui est totalement faux car le produit est positif lorsque les deux facteurs sont de même signe. En écrivant un telle bêtise, on oublie le cas$(2x-1)\leq 0\ et\ (x^2-6x+8)\leq 0$.

Exercice n°15 : résoudre les inéquations : $(2x+1)(x+7)(x-3)\geq 0$ et $2x(x+1)^2<(1-3x)(x+1)^2$.

6.4 Inéquation quotient

Exemple : résoudre l'inéquation (E): $\frac{x}{x+2}+\frac{2}{x}<-3$.

Ici, il est très important de débuter par la recherche de l'ensemble de définition.

(E) est bien définie pour $x+2\neq 0$ et $x\neq 0$ et donc le domaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{-2{,}0\}$.

Pour $x\in\mathbb{R}\backslash\{-2{,}0\},(E)\Leftrightarrow \frac{x}{x+2}+\frac{2}{x}+3<0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{mise\ au\ même\ dénominateur} \frac{x^2+2(x+2)+3x(x+2)}{x(x+2)}<0$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{une\ fraction\ est\ nulle\\ quand\ son\ numérateur\\ est\ nul}} \frac{4x^2+8x+4}{x(x+2)}<0 \Leftrightarrow \frac{4(x^2+2x+1)}{x(x+2)}<0 \Leftrightarrow \frac{4(x+1)^2}{x(x+2)}<0.$$

On dresse le tableau de signe de ce dernier quotient.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$\frac{4(x+1)^2}{x(x+2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

☠ On remarquera la présence des « **doubles barres** » en $x=-2$ et $x=0$ pour signifier que ce sont des « valeurs interdites ».

Finalement, l'ensemble solution n'est autre que : $S=]-2;-1[\cup]-1;0[$.

Exercice n°16 : résoudre les inéquations : $\frac{x-4}{x+4}>0$ et $\frac{x+2}{x+1}+4\leq\frac{5x}{x+2}$.

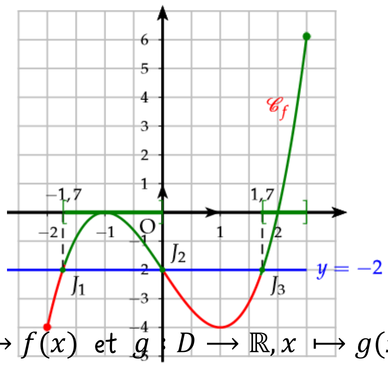
Résolution graphique d'inéquations

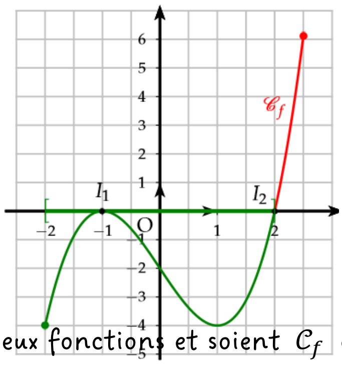
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$ une fonction et soit C_f son graphe dans un repère du plan.

> L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > a$ ou $f(x) \geq a$ est formé des abscisses des points du graphe de f situés **AU DESSUS** (éventuellement sur celle-ci) de la droite horizontale d'équation $y = a$.
>
> L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < a$ ou $f(x) \leq a$ est formé des abscisses des points du graphe de f situés **EN DESSOUS** (éventuellement sur celle-ci) de la droite horizontale d'équation $y = a$.

Exemple

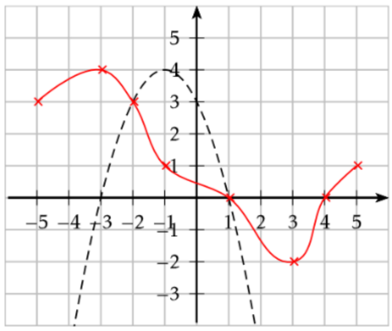
- ✓ L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est $S = [-2\,;2]$.
- ✓ L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) < 0$ est $S = [-2\,;\,-1[\cup]-1\,;2[$.
- ✓ L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est $S = \{-1\} \cup [2\,;2{,}5]$.
- ✓ L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geq -2$ est $S = [-1{,}7\,;0] \cup [1{,}7\,;2{,}5]$.





Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x)$ deux fonctions et soient C_f et C_g leurs graphes dans un repère du plan.

> L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est formé des abscisses des points d'intersection de C_f et C_g.
>
> L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$ est formé des abscisses des points de C_f situés **EN DESSOUS** (éventuellement sur celle-ci) de C_g.

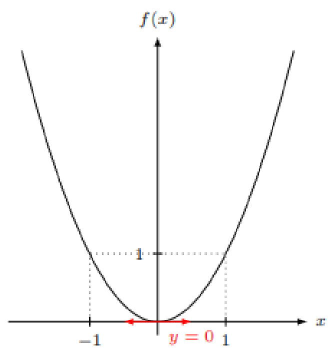


Exemple : l'inéquation $f(x) < g(x)$ donne pour ensemble solution : $S =]-2\,;1[$.

7. Fonctions usuelles

7.1 La fonction carrée

> 🖉 **Définition n°7** : on appelle « **fonction carrée** » la fonction qui à tout réel x, associe le nombre : x^2



Son graphe est une **parabole** d'équation $y = x^2$.

Proposition n°9

✓ La fonction $x \longmapsto x^2$ est **paire** : pour $x \in \mathbb{R}, (-x)^2 = x^2$:
son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

✓ **Signe** : $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 \geq 0$.

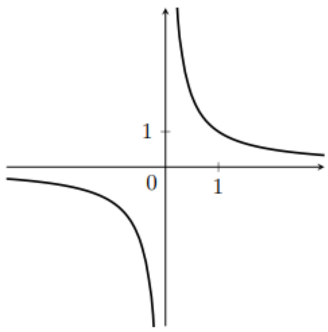
✓ La fonction $x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(x^2)' = 2x$.

✓ La fonction $x \longmapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$: $(0 \leq a \leq b) \Longrightarrow (a^2 \leq b^2)$
et décroissante sur $\mathbb{R}_-$: $(a \leq b \leq 0) \Longrightarrow (a^2 \geq b^2)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

☠ Le passage au carré sur un inégalité requiert donc des « précautions » sur le signe des membres de l'inégalité !

7.2 La fonction inverse



Définition n°8 : on appelle « **fonction inverse** » la fonction qui à tout réel **non nul** x, associe le nombre : $\frac{1}{x}$.

Son graphe est une **hyperbole** d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Proposition n°10

✓ La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est **impaire** : pour $x \neq 0, \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$:
son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

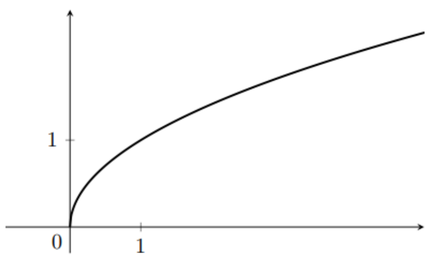
✓ **Signe** : $x > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} > 0$ et $x < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < 0$

✓ La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$.

✓ La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$: $(0 < a \leq b) \Longrightarrow (\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b})$
et décroissante sur $]0\,;+\infty[$: $(a \leq b < 0) \Longrightarrow (\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b})$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 0

7.2 La fonction racine carrée



Définition n°9 : on appelle « **fonction racine carrée** » la fonction qui à tout réel **positif** x, associe le nombre : $\sqrt{x}$.

Proposition n°11

✓ **Signe** : pour $x \in \mathbb{R}+, \sqrt{x} \geq 0$.

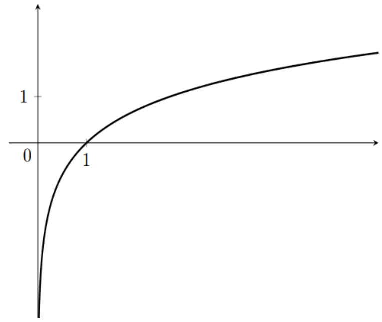
✓ Pour $x, y \geq 0, \sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ et si $y > 0, \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

✓ La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

✓ La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$: $(0 \leq a \leq b) \Longrightarrow (\sqrt{a} \leq \sqrt{b})$.

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

7.3 La fonction logarithme népérien



Définition n°10 : on appelle « fonction logarithme népérien »

la fonction qui à tout réel strictement positif x, associe le nombre : $ln\,(x)$.

Proposition n°12

- ✓ **Signe** : $(0 < x \leq 1) \Longrightarrow \ln(x) \leq 0$ et $(x \geq 1) \Longrightarrow \ln(x) \geq 0$.
- ✓ ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $(\ln\,(x))' = \frac{1}{x}$.
- ✓ ln est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$: $(0 < a \leq b) \Longrightarrow (ln\,(a) \leq ln\,(b))$.
- ✓ $ln(1) = 0$
- ✓ $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Remarque : il existe un unique nombre réel noté $e \cong 2{,}72$ et appelé « nombre d'Euler » vérifiant : $ln(e) = 1$.

Proposition n°13 : propriétés de calcul du logarithme

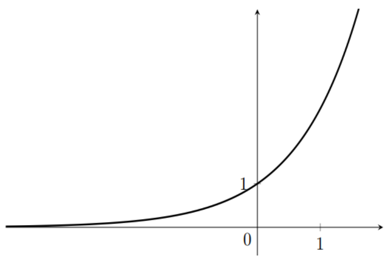
Pour tous réels $a, b > 0$ on a

1) $ln(ab) = ln(a) + ln\,(b)$
2) $ln\left(\frac{1}{b}\right) = -ln\,(b)$ et $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln\,(b)$
3) Pour tout entier $n, ln(a^n) = nln(a)$

Exemple : $ln\left(\frac{192}{108}\right) = ln\left(\frac{16}{9}\right) = ln(16) - ln(9) = ln(2^4) - ln(3^2) = 4\,ln(2) - 2\,ln(3)$.

Exercice n°17 : simplifier au maximum $F = \frac{\ln(16)+\ln\,(8)}{10\ln(2)+\ln\,(4)}$.

7.4 La fonction exponentielle



Définition n°11 : on appelle « fonction exponentielle »

la fonction exp qui à tout réel strictement positif x, associe le nombre : e^x

où $y = e^x$ est l'unique solution de l'équation : $ln(y) = x$.

Proposition n°14

- ✓ **Signe** : $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow e^x > 0$
- ✓ La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(e^x)' = e^x$
- ✓ La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$: $(a \leq b) \Longrightarrow (e^a \leq e^b)$.
- ✓ $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- ✓ $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- ✓ Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0, e^x = y \Leftrightarrow x = ln\,(y)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp$	0	↗	$+\infty$

Proposition n°15 : propriétés de calcul de l'exponentielle

Pour tous réels a, b on a :

1) $e^{a+b} = e^a \times e^b$
2) $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
3) Pour tout entier $n, (e^a)^n = e^{na}$

Exercice n°18 : simplifier $G = ln\left(\frac{12e^5}{e^{-6} \times e^2}\right)$ sous la forme : $m + nln(2) + pln(3)$ où m, n, p sont des entiers.

8. Ensemble de définition d'une fonction

Définition n°12 : fonction et domaine de définition

D_1# Une fonction $f : x \longmapsto f(x)$ est un procédé qui à tout réel x associe au plus un réel $y = f(x)$ appelé « **l'image de x par f** ».

D_2# Le « **domaine de définition de f** » noté D_f est l'ensemble des valeurs de x pour lesquels $f(x)$ existe.

A chaque fois que nous ferons face à une fonction f donnée, il sera très important de déterminer en premier lieu son domaine de définition D_f. Pour une raison évidente : les valeurs de $x \notin D_f$, la fonction n'a pas d'existence.

Il faut surtout faire attention aux trois points suivants :

1) $\frac{numérateur}{dénominateut}$ existe si, et seulement si : $\begin{cases} le\ numérateur\ existe \\ le\ dénominateur\ existe \\ le\ dénominateur\ est\ NON\ NUL \end{cases}$

2) $ln\,(contenu)$ existe si, et seulement si $\begin{cases} contenu\ existe \\ contenu\ est\ strictement\ positif \end{cases}$

3) $\sqrt{radicande}$ existe si, et seulement si $\begin{cases} radicande\ existe \\ radicande\ est\ positif \end{cases}$

E_1# La fonction polynôme $f : x \longmapsto 2x^3 - x^2 + x - 1$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.

♥ On retiendra qu'une fonction polynômiale est définie sur $\mathbb{R}$.

E_2# La fonction rationnelle $g : x \longmapsto \frac{x^3+x^2-2x+1}{x^2-4x+3}$ est définie pour : $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\Delta=4} x \neq 1\ et\ x \neq 3$

$D_g = \mathbb{R} - \{1{,}3\}$.

♥ On retiendra qu'une fonction rationnelle est définie sur $\mathbb{R}$ privé des valeurs de qui annulent son dénominateur.

E_3# La fonction $h : x \longmapsto \ln(x-1)$ est définie pour $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ $donc$ $D_h =]1\,; +\infty[$.

♥ $\ln(A)\ existe \Leftrightarrow A\ existe\ et\ A > 0$

E_4# La fonction rationnelle $i : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ est définie pour $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\Delta=4} x \leq ou\ x \geq 2$.

Donc $D_i =]-\infty\,; 1] \cup [3 \cup\,; +\infty[$.

♥ $\sqrt{A}\ existe \Leftrightarrow A\ existe\ et\ A \geq 0$

Exercice n°19 : déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :$f_1 : x \mapsto \sqrt{3x+2}$,

$f_2 : x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$, $f_3 : x \mapsto \frac{1}{\ln(x-2)}$.

9. Dérivation

On rappelle la dérivée des fonctions usuelles ainsi que les règles opératoires de dérivation.

Fonction f	Fonction f'
k	0
$ax+b$	a
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un nombre	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Multiplication	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Puissance	u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
Division	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
exponentielle	e^u	$u' \, e^u$
logarithme	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Exemple : étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

f est de la forme $u \times v$ où $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^x$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$.

Exemple : étudier la dérivabilité de la fonction $g : x \mapsto \ln(x+1)$.

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R}, x+1 > 0\} =]-1; +\infty[$.

g est de la forme $\ln(u)$ où $u : x \mapsto x+1$ est dérivables sur $]-1\,;\,+\infty[$.

On en déduit que g est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x+1}$.

Exercice n°20 : après avoir déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, calculer leur dérivée.

1. $f : x \mapsto f(x) = x^3 + x + 3$, 2. $f : x \mapsto f(x) = 3(x^2+4)$, 3. $f : x \mapsto f(x) = (-2x+3)(5x-3)$

4. $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^3}$, 5. $f : x \mapsto f(x) = (2x-7)^2$, 6. $f : x \mapsto f(x) = \frac{3x-4}{x^2+3}$, 7. $f : x \mapsto f(x) = ln(-2x+5)$

8. $f : x \mapsto f(x) = exp\,(2x+1)$.

10. Les systèmes linéaires

Introduction : les systèmes linéaires interviennent dans de nombreux domaines d'application car ils forment la base calculatoire de l'algèbre linéaire. Ils permettent aussi de traiter une bonne partie de l'algèbre linéaire en dimension finie mais cela nous - y reviendrons ultérieurement.

✎**Définition n°13** : soient a, b, c trois réels tels que $(a, b) \neq (0{,}0)$ alors une la relation : « $ax + by = c$ » est une « **équation linéaire** » en les variables x et y.

Exemples

- $2x + y = 5$ est une équation linéaire en les variables x, y.
- $2u + 4v = 0$ est une équation linéaire en les variables u, v.

✎ **Interprétation graphique** : si le plan est muni d'un repère orthonormé, alors l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation linéaire $ax + by = c$ est une droite $\mathcal{D}$.

Exemples

- $2x + y = 2 \Leftrightarrow y = -2x + 2$ est autre que l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}$ dont l'ordonnée à l'origine est $p = 2$ et dont le coefficient directeur est $m = -2$.
- $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ est autre que l'équation réduite de la droite **verticale** $\mathcal{D}$ passant par le point $(3\,;0)$.
- $6y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}$ est autre que l'équation réduite de la droite **horizontale** $\mathcal{D}$ passant par le point $(0\,;\frac{1}{3})$.

✎**Définition n°14** : un système linéaire de deux équations à deux inconnues est du type : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

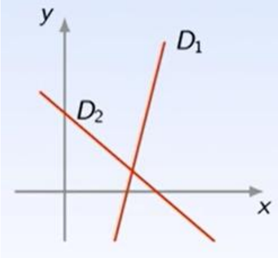
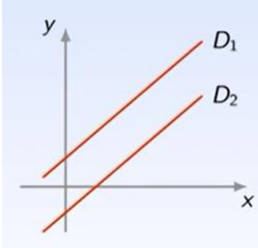
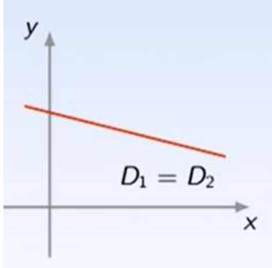
Exemple : $(S) : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ est un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

✎ **Interprétation graphique** : le plan est muni d'un repère orthonormé

La résolution du système linéaire $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ s'interprète géométriquement comme l'étude de l'intersection des droites $\mathcal{D} : ax + by = c$. et $\mathcal{D}' : a'x + b'y = c'$.

En effet, un point de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ si, et seulement si, il vérifie simultanément les deux équations, autrement dit s'il est une solution du système.

On peut alors distinguer trois cas

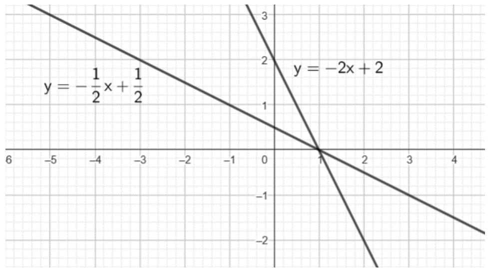
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point.	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles.	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.
		
Le système (S) possède alors une seule solution qui n'est autre que le couple de coordonnées du point d'intersection.	Le système (S) ne possède pas de solution : Solution = $\varnothing$.	Le système (S) possède alors une infinité de solutions.

Conclusion : l'ensemble des solutions d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues est soit réduit à une seule solution, soit vide, soit infini.

Exemple : résoudre graphiquement le système linéaire $(S) : \begin{cases} 2x \ \ + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

On trace les droites $\mathcal{D} : 2x + y = 2$ et $\mathcal{D}' : x + 2y = 1$.

- $\mathcal{D} : 2x + y = 2 \Leftrightarrow y = -2x + 2$
- $\mathcal{D}' : x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



Les deux droites sont sécantes aux points de coordonnées $(1\,;0)$.

Par suite, $Solution = \{(1;0)\}$.

Exercice n°21 : résoudre graphiquement les système linéaires $(S_1) : \begin{cases} x \ + 2y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ et $(S_2) : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Méthode de résolution : pour résoudre de telles systèmes, on connaît depuis le collège la méthode de substitution qui consiste, en utilisant l'une des deux équations, à exprimer l'une des inconnue en fonction de l'autre, et à injecter cette expression dans l'autre équation.

Exemple : résoudre le système linéaire $(S) : \begin{cases} 2x \ \ + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ par substitution.

$$\begin{cases} 2x \ + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x + 2(2 - 2x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x + 4 - 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ -3x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

On retrouve le même ensemble solution : $Solution = \{(1;0)\}$.

Exercice n°22 : résoudre les système linéaires $(S_1) : \begin{cases} x \ + 2y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ et $(S_2) : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ par substitution.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice n°1 : simplifier

$\frac{21}{15}=\frac{3\times 7}{3\times 5}=\frac{7}{5}$	$\frac{42}{14}=\frac{14\times 3}{14}=3$	$\frac{24}{144}=\frac{24}{24\times 6}=\frac{1}{6}$	$\frac{105}{49}=\frac{7\times 15}{7\times 7}=\frac{15}{7}$

Exercice n°2 : simplifier

$\frac{7}{6}-\frac{1}{15}=\frac{7\times 5}{6\times 5}-\frac{1\times 2}{15\times 2}$ $=\frac{35-2}{30}=\frac{33}{30}$	$\frac{5}{6}+\frac{1}{15}=\frac{5\times 5}{6\times 5}+\frac{1\times 2}{15\times 2}$ $=\frac{25+2}{30}=\frac{27}{30}=\frac{3\times 9}{3\times 10}$ $=\frac{9}{10}$	$\frac{3}{14}-\frac{1}{28}=\frac{3\times 2}{14\times 2}-\frac{1}{28}$ $=\frac{6-1}{28}=\frac{5}{28}$	$\frac{5}{18}+\frac{1}{24}=\frac{5\times 4}{18\times 4}+\frac{1\times 3}{24\times 3}$ $=\frac{20+3}{72}=\frac{23}{72}$

Exercice n°3 : simplifier

$\frac{\frac{8}{21}}{4}=\frac{8}{21}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{21}$	$\frac{8}{\frac{21}{4}}=8\times\frac{4}{21}=\frac{32}{21}$	$\frac{\frac{8}{21}}{\frac{4}{7}}=\frac{8}{21}\times\frac{7}{4}=\frac{2}{3}$	$\frac{2\times\frac{5}{3}-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}-3\right)^2}=\frac{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{6}{2}\right)^2}$ $=\frac{3}{\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{3}{\frac{25}{4}}=3\times\frac{4}{25}$ $=\frac{12}{25}$

Exercice n°4 : simplifier

$A=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$ $A=\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2=5-4=1$	$B=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$	$C=\sqrt{6}\times\sqrt{5}\times\sqrt{18}\times\sqrt{15}$ $C=\sqrt{6\times 5\times 18\times 15}$ $C=\sqrt{2\times 3\times 5\times 2\times 9\times 3\times 5}$ $C=\sqrt{4\times 9\times 9\times 25}$ $C=\sqrt{4}\times\sqrt{9}\times\sqrt{9}\times\sqrt{25}$ $C=2\times 3\times 3\times 5=90$

Exercice n°5 : développer les expressions suivantes.

$A=2x^3+2x^2+2x^2+2x+3x+3=2x^3+4x^2+5x+3$

$B=4-4x+x^2$

$C=(9x^2+6x+1)-(x^2+4x+4)=8x^2+2x-3$

$D=(x+3)(x+3)^2=(x+3)(x^2+6x+9)=x^3+6x^2+9x+3x^2+18x+27=x^3+9x^2+27x+27$

$E=(1+2x+x^2)+(1-x^2)=2+2x$

Exercice n°6 : factoriser les expressions suivantes.

$A = (x+2)[(3x^2+1) - (x+1)] = (x+2)(3x^2+1-x-1) = (x+2)(3x^2-x) = x(x+2)(3x-1)$

$B = (x-4)(x+4) + 3(x-4) = (x-4)[(x+4)+3] = (x-4)(x+7)$

$C = (x-1)(x-1) - (x-1)(x+3) = (x-1)[(x-1)-(x+3)] = (x-1)(x-1-x-3) = -4(x-1)$

Exercice n°7 : résoudre les équations suivantes : $x^2+5x+6=0$ et $x^2+x+1=0$.

Le domaine de définition de l'équation $x^2+5x+6=0$ est $\mathbb{R}$.

Le discriminant vaut : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$ donc l'équation possède deux solutions réelles :

$x_1 = \frac{-5-\sqrt{1}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{1}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$. Finalement, $S = \{-3, -2\}$.

Le domaine de définition de l'équation $x^2+x+1=0$ est $\mathbb{R}$.

Le discriminant vaut : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc l'équation ne possède pas de solution réelle.

Finalement, $S = \emptyset$.

Exercice n°8 : résoudre les équations suivantes : $x^2+6=0$ et $x^2-3=0$.

L'équation $x^2+6=0$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et $x^2+6=0 \Leftrightarrow x^2=-6$.

Cette dernière équation ne possède pas de solution réelle car $-6<0$. D'où : $S = \emptyset$.

L'équation $x^2-3=0$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et $x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

D'où : $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Exercice n°9 : résoudre les équations suivantes :

1) $2x+5=0$
2) $3x-7=5(x+2)+8$
3) $x^2+2x-3=0$
4) $x(x-1)+(x+4)(x-1)^2=0$

L'équation $2x+5=0$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et $2x+5=0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$. D'où : $S = \{-\frac{5}{2}\}$.

L'équation $3x-7=5(x+2)+8$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et

$3x-7=5(x+2)+8 \Leftrightarrow 3x-7=5x+18 \Leftrightarrow -2x=25 \Leftrightarrow x=-\frac{25}{2}$. D'où : $S = \{-\frac{25}{2}\}$.

L'équation $x^2+2x-3=0$ est une équation polynômiale de degré 2 a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$.

Le discriminant vaut : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$ donc l'équation possède deux solutions réelles :

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Finalement, $S = \{-3,1\}$.

L'équation $x(x-1)+(x+4)(x-1)^2=0$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$.

$x(x-1)+(x+4)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)[(x+(x+4)(x-1)]=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+x^2-x+4x-4)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x-4)=0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow x-1=0 \; ou \; x^2+4x-4=0.$

La première équation a pour solution $x = 1$.

Le discriminant de la deuxième vaut : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 32 > 0$ donc l'équation possède deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-4-\sqrt{32}}{2} = \frac{-4-4\sqrt{2}}{2} = -2 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{32}}{2} = \frac{-4+4\sqrt{2}}{2} = -2 + 2\sqrt{2}$.

Finalement, $S = \{1, -2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}\}$.

<u>Exercice n°10</u> : résoudre les équations suivantes :

1) $\frac{x-4}{x+4} = 0$
2) $\frac{x+2}{x+1} + 4 = \frac{5x}{x+2}$

L'équation $\frac{x-4}{x+4} = 0$ est bien définie pour $x + 4 \neq 0$ donc le domaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$.

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-4\}$, $\frac{x-4}{x+4} = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Finalement, puisque $x = 4 \in \mathbb{R}\backslash\{-4\}$ alors $S = \{4\}$.

L'équation $\frac{x+2}{x+1} + 4 = \frac{5x}{x+2}$ est bien définie pour $x + 1 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$ donc le domaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{-2, -1\}$.

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, -1\}$, $\frac{x+2}{x+1} + 4 = \frac{5x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} + 4 - \frac{5x}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2 + 4(x+1)(x+2) - 5x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + 4(x+1)(x+2) - 5x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 4(x^2 + 2x + x + 2) - 5x^2 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 4x^2 + 12x + 8 - 5x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow 11x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{12}{11}$

Finalement, puisque $x = -\frac{12}{11} \in \mathbb{R}\backslash\{-2, -1\}$ alors $S = \left\{-\frac{12}{11}\right\}$.

<u>Exercice n°11</u> : démontrer que pour tout réel x positif on a : $x + 1 \geq 2\sqrt{x}$.

Pour $x \geq 0, x + 1 \geq 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 \geq 0$ ce qui est toujours vraie car le carré d'un réel est positif.

<u>Exercice n°12</u> : résoudre les inéquations : $2x + 1 < 0$ et $-6x + 3 \leq 0$.

Ce sont toutes les deux des inéquations polynômiales de degré 1 et elles ont pour ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}, 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ et donc $S =]-\infty\,; -\frac{1}{2}[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $-6x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow -6x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ et donc $S = [\frac{1}{2}; +\infty[$.

<u>Exercice n°13</u> : résoudre les inéquations : $x^2 + x + 1 < 0$ et $x^2 + 3x - 4 \leq 0$.

Ce sont toutes les deux des inéquations polynômiales de degré 2 et elles ont pour ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Le discriminant du premier trinôme vaut : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc il ne possède pas de racine réelle et il est toujours du signe de $a = 1$ donc positif.

Par suite, $S = \emptyset$.

Le discriminant du deuxième trinôme vaut : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0$ donc il possède deux racines réelles : $x_1 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2} = \frac{-3-5}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$.

Le trinôme est du signe de $-a = -1 < 0$ entre les racines donc $S = [-4\,;1]$.

<u>Exercice n°14</u> : résoudre les inéquations : $x^2 < 25$ et $x^2 \geq 3$.

Ce sont toutes les deux des inéquations polynômiales de degré 2 et elles ont pour ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}, x^2 < 25$ a pour solutions $S =]-5\,;5[$.

Pour $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 3$ a pour solution $S =]-\infty\,;\,-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}\,;\,+\infty[$.

<u>Exercice n°15</u> : résoudre les inéquations : $(2x+1)(x+7)(x-3) \geq 0$ et $2x(x+1)^2 < (1-3x)(x+1)^2$.

Toutes ces inéquations ont pour ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Pour la première, on dresse un tableau de signes.

x	$-\infty$		-7		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [-7\,;\,-\frac{1}{2}] \cup [3\,;\,+\infty[$.

$2x(x+1)^2 < (1-3x)(x+1)^2 \Leftrightarrow 2x(x+1)^2 - (1-3x)(x+1)^2 < 0 \Leftrightarrow (x+1)^2[(2x-(1-3x)] < 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2(2x-1+3x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(5x-1) < 0$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Produit		$-$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,\frac{1}{5}[$.

<u>Exercice n°16</u> : résoudre les inéquations : $\frac{x-4}{x+4} > 0$ et $\frac{x+2}{x+1} + 4 \leq \frac{5x}{x+2}$.

L'inéquation $\frac{x-4}{x+4} > 0$ est bien définie pour $x+4 \neq 0$ donc le domaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
quotient		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\,-4[\cup]-4\,;\,+\infty[$.

L'inéquation $\frac{x+2}{x+1}+4 \leq \frac{5x}{x+2}$ est bien définie pour $x+1 \neq 0$ et $x+2 \neq 0$ donc le domaine de définition est $\mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$.

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$, $\frac{x+2}{x+1}+4 \leq \frac{5x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1}+4-\frac{5x}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2+4(x+1)(x+2)-5x(x+1)}{(x+1)(x+2)} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{11x+12}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{12}{11}$		-1		$+\infty$	
$11x+12$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$S =]-\infty\,;\,-2[\cup[-\frac{12}{11}\,;\,-1[$.
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		
quotient		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$		

Exercice n°17 : simplifier au maximum $F = \frac{\ln(16)+\ln(8)}{10\ln(2)+\ln(4)}$.

$F = \frac{\ln(16)+\ln(8)}{10\ln(2)+\ln(4)} = \frac{\ln(2^4)+\ln(2^3)}{10\ln(2)+\ln(2^2)} = \frac{4\ln(2)+3\ln(2)}{10\ln(2)+2\ln(2)} = \frac{7\ln(2)}{12\ln(2)} = \frac{7}{12}$.

Exercice n°18 : simplifier $G = ln\left(\frac{12e^5}{e^{-6}\times e^2}\right)$ sous la forme : $m + nln(2) + pln(3)$ où m, n, p sont des entiers.

$$G = ln\left(\frac{12e^5}{e^{-6}\times e^2}\right) = ln\left(\frac{12e^5}{e^{-4}}\right) = \ln(12e^5) - \ln(e^{-4}) = \ln(12) + \ln(e^5) - (-4) = \ln(3\times 2^2) + 5 + 4$$

$$= 9 + 2\ln(2) + \ln(3).$$

Exercice n°19 : déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \sqrt{3x+2}$, $f_2 : x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$, $f_3 : x \mapsto \frac{1}{\ln(x-2)}$,

$\sqrt{3x+2}$ existe $\Leftrightarrow 3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$ et par suite, $\mathcal{D}_{f_1} = [-\frac{2}{3};+\infty[$.

$\ln(x^2+2x-3)$ existe $\Leftrightarrow x^2+2x-3 > 0$.

Le discriminant de ce trinôme vaut : $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-3) = 16 > 0$ donc il possède deux racines réelles :

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$.

Le trinôme est du signe de $a = 1 > 0$ en dehors des racines donc $\mathcal{D}_{f_2} =]-\infty\,;\,-3[\cup]1\,;\,+\infty[$.

$\frac{1}{\ln(x-2)}$ existe $\Leftrightarrow x-2 > 0 \; et \; \ln(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x > 2 \; et \; x-2 \neq 1 \Leftrightarrow x > 2 \; et \; x \neq 3$.

Par suite, $\mathcal{D}_{f_3} =]2\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[$.

Exercice n°20 : après avoir déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, calculer leur dérivée.

1. $f : x \mapsto x^3 + x + 3$
2. $f : x \mapsto 3(x^2 + 4)$
3. $f : x \mapsto (-2x + 3)(5x - 3)$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$
5. $f(x) = (2x - 7)^2$
6. $f : x \mapsto \dfrac{3x - 4}{x^2 + 3}$
7. $f : x \mapsto \ln(-2x + 5)$
8. $f : x \mapsto \exp(2x + 1)$

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $f'(x) = 3x^2 + 1$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$.

3) Le domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

f est de la forme $u \times v$ où $u : x \mapsto -2x + 3$ et $v : x \mapsto 5x - 3$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -2 \times (5x - 3) + (-2x + 3) \times 5$

$= -10x + 6 - 10x + 15 = -20x + 21$

4) Le domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ où $u : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto x^3$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{0 \times x^3 - 1 \times 3x^2}{x^6} = \frac{-3x^2}{x^6} = \frac{-3}{x^4}$.

5) Le domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

f est de la forme u^2 où $u : x \mapsto 2x - 7$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times 2 \times (2x - 7) = 4(2x - 7)$.

6) Le domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car $x^2 + 3 \neq 0$ pour tout réel x.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ où $u : x \mapsto 3x - 4$ et $v : x \mapsto x^2 + 3$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{3 \times (x^2 + 3) - (3x - 4) \times 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{3x^2 + 9 - 6x^2 + 8x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-3x^2 + 8x + 9}{(x^2 + 3)^2}$.

7) La fonction f est définie pour $-2x + 5 > 0 \Leftrightarrow -2x > 5 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$

Le domaine de définition est $\mathcal{D}_f =]-\infty\,; -\frac{5}{2}[$.

f est de la forme $\ln(u)$ où $u : x \mapsto -2x + 5$ est dérivables sur $]-\infty\,; -\frac{5}{2}[$.

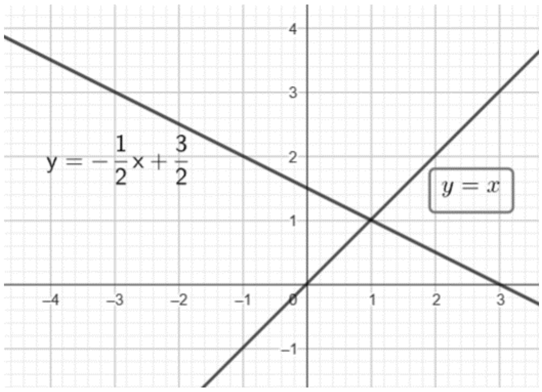
On en déduit que f est dérivable sur $]-\infty\,; -\frac{5}{2}[$.et $f'(x) = \frac{u\prime(x)}{u(x)} = \frac{-2}{-2x + 5}$.

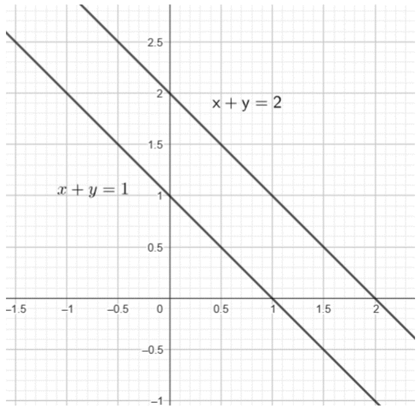
8) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car c'est le cas de la fonction exponentielle.

f est de la forme e^u où $u : x \mapsto 2x + 1$ est dérivables sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 2e^{2x+1}$.

<u>**Exercice n°21**</u> : résoudre graphiquement les système linéaires $(S_1) : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ et $(S_2) : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$





Le premier système linéaire a pour solution $Solution = \{(1;1)\}$.

Le deuxième système linéaire n'a pas de solution car les deux droites sont strictement parallèles.

<u>**Exercice n°22**</u> : résoudre les système linéaires $(S_1) : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ et $(S_2) : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ par substitution.

$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2x = 3 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ et $Solution = \{(1;1)\}$.

$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x + (1 - x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 1 = 2 \end{cases}$

Ce dernier système présente une « <u>**incompatibilité**</u> » donc $Solution = \emptyset$.

STAGE
DE PRERENTREE
MATHEMATIQUES
ECG1

Jérôme Sauvage
Lycée Carnot – Gambetta d'Arras

<u>EXERCICE n°1</u> : montrer une égalité

1. Montrer que : $\frac{3}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 2$ puis que : $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.
2. Soit a un réel différent de 0 et de -1. Montrer que : $\frac{1}{a+1} - \frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}} = \frac{2-a}{a+1}$.

<u>EXERCICE n°2</u> : mettre sous une forme imposée

Simplifier les expressions pour les mettre sous la forme demandée.

1. $2^n + 2^n = 2^{\cdots\cdots}$ $\qquad 3^n + 3^n = \ldots \times 3^{\cdots\cdots}$
2. $1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{\cdots}{(x-1)^2}$
3. $\frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \cdots \times \left(1 - \frac{1}{\cdots\cdots}\right)$

<u>EXERCICE n°3</u> : calculer avec des exponentielles et des logarithmes

1. Démontrer les égalités suivantes : $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$ puis $\frac{ln(\sqrt{ab})}{\ln(a)+\ln(b)} = \frac{1}{2}$.
2. Mettre sous la forme demandée :
   2a. $ln(x^2-1) - ln(x-1) = ln\,(\ldots)$
   2b. $\left(1 - \frac{1}{e^{2t}}\right)\frac{e^t}{1+e^t} = 1 - \cdots$
   2c. $\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}} = \frac{1+\cdots}{1-\cdots}$

<u>EXERCICE n°4</u> : autour de l'inverse

1. Rappeler la définition de l'inverse d'un nombre réel quand il existe.
2. Soient a et b deux réels non nuls et on considère la phrase : « le produit de l'inverse de a et de l'inverse de b est égal à l'inverse du produit de a et de b ».
   2a. Traduire cette phrase par une égalité mathématique.
   2b. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier en le démontrant.
3. Soient a et b deux réels non nuls et on considère la phrase : « le somme de l'inverse de a et de l'inverse de b est égal à l'inverse de la somme de a et de b ».
   3a. Traduire cette phrase par une égalité mathématique.
   3b. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier en le démontrant.
4. Soient a et b deux réels non nuls. Simplifier au mieux l'expression : $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

<u>EXERCICE n°5</u> : la notion de commutativité

<u>Définition</u> : deux actions A et B sont dites « **<u>commutatives</u>** » lorsque leurs réalisations successives dans un sens ou dans l'autre (A puis B ou bien B puis A) donnent le même résultat.

1. L'addition des réels est-elle commutative ? Traduire mathématiquement.
2. La soustraction, et la division le sont-elles ?
3. Expliquer schématiquement que : $3 \times 7 = 7 \times 3$.
4. Les actions A : « somme » et B : « au carré » sont-elles commutatives ?

EXERCICE n°6 : développer, factoriser et égalités remarquables

Soit x un réel quelconque.

1. On considère l'expression $A(x) = (2x+1)^2 + (2x+1)(x-2)$.
   1a. Développer, réduire et ordonner $A(x)$.
   1b. Résoudre alors l'équation : $A(x) = 0$.
   1c. Factoriser au mieux $A(x)$ puis résoudre à nouveau l'équation $A(x) = 0$.
2. Reprendre la première question avec les expressions : $B(x) = (2x+1) - (2x+1)(x-2)$ et $C(x) = (2x+1)^2 - (x-2)^2$.

CHAPITRE n°7 : résoudre une équation/inéquation « quotient ».

1. Proposer une méthode générale de résolution des équations du type : $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ et $\frac{A(x)}{B(x)} = 1$.
2. Résoudre des équations suivantes : $\frac{x^2-x-2}{x+2} = 0, \frac{x^2-x-2}{x+2} = 1, \frac{x+2}{x^2-x-2} = 1$.
3. Proposer une méthode générale de résolution des inéquations du type : $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ et $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$.
4. Résoudre des équations suivantes : $\frac{x^2-x-2}{x-2} \geq 0, \frac{x+2}{x^2-x-2} \leq 0,\ \frac{1}{x-2} \geq -x$.

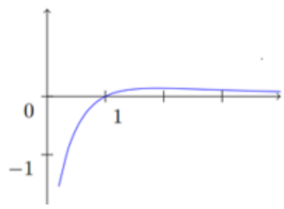
EXERCICE n°8 : une parabole

La hauteur $h(t)$ (en m) d'un javelot à l'instant t, en seconde, est donnée par : $h(t) = \frac{1}{2}t^2 + 8t + 2$.

1. A quel instant, le javelot est-il au plus haut ?
2. A quels instants atteindra-t-il la hauteur de 32m ?
3. A quel instant touchera-t-il le sol ?

EXERCICE n°9 : lecture graphique

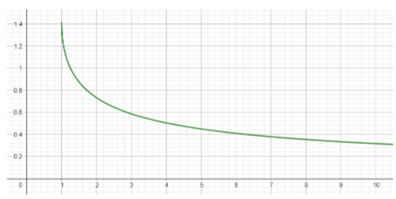
Considérons la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ et son graphe ci-contre.



1. Conjecturer graphiquement son domaine de définition, son signe, ses limites aux bornes.
2. Retrouver vos résultats par le calcul.

EXERCICE n°10 : lecture graphique (le retour !)

Considérons la fonction $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$. et son graphe ci-dessous.



1. Conjecturer graphiquement son domaine de définition, son signe, ses limites aux bornes.
2. Retrouver vos résultats par le calcul.

EXERCICE n°11 : étude de fonction

Considérons la fonction $h : x \mapsto h(x) = (x+1)e^x$.

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $h(1)$.
3. Déterminer son signe.
4. Déterminer ses limites aux bornes.
5. Dresser son tableau de signe.
6. Déterminer une équation de la tangente T au graphe de h en x = 0.
7. Tracer l'allure du graphe de h en vous aidant de ce qui précède.
8. A l'aide du graphique, discuter de la continuité et de la dérivabilité de h.